בחינת גמר בחדו"א 2מ' 2 (104022)

מועד א'

סמסטר אביב תשע"ד

מספר הסטודנט	

הוראות לנבחן

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- כל חומר עזר אסור בשימוש (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש לשמור על המחברת בשלמותה (אין להוסיף או לתלוש דפים).
- עליכם לענות על כל השאלות בבחינה.
- על כל הפתרונות להופיע במחברת הזו.
- נא להשתמש בעט בלבד.

שאלות	ניקוד
חלק א'	
חלק ב'	
9	
10	

בהצלחה!

חלק א'

בכל אחת משש השאלות הבאות הקף את התשובה הנכונה (כל תשובה נכונה מזכה בחמש נקודות).

שאלה 1

נתון השדה הפיזיקלי $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(|x|,0,z)$. מהו הדיברגנס, לפי הגדרתו הפיזיקלית, ש"מרגיש" החלקיק הנתון להשפעה הבלעדית של $\overrightarrow{F}$ ב$-(0,0,0)$?

א. 0 ב. 1 ג. ∞ ד. $\frac{3\pi}{4}$

שאלה 2

נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2y^2z$. ערכה המקסימלי בתחום:
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \ x+y+z\le 5,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ הוא:

א. 32 ב. 18 ג. 16 ד. $\frac{625}{32}$

שאלה 3

נתונה ההעתקה $u=2x-y,\ v=x-2y$. הישר $y=x$ עובר תחת העתקה זאת לישר במישור u,v שמשוואתו:

א. $u=v$ ב. $u=-v$ ג. $u=2v$ ד. $2u=v$

שאלה 4

יהי M מישור הניצב לעקום:

$$C(t)=(cos(t),sin(t),t)$$
$$t\in\mathbb{R}$$

בנקודה שבה $t_0=\frac{\pi}{4}$. מהו המרחק מן הראשית ל־M בנקודה זאת?

א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ ג. $\frac{\pi}{4}$ ד. $\frac{\pi}{3}$

חלק ב'

נכון או לא נכון (כל תשובה נכונה מזכה בחמש נקודות).

שאלה 5

משטח S נתון ע"י הפרמטריזציה הבאה:

$$\bar{\gamma}(s,t) = (cos(t) + s \cdot cos(\tfrac{t}{2}) \cdot cos(t), sin(t) + s \cdot cos(\tfrac{t}{2}) \cdot sin(t), s \cdot sin(\tfrac{t}{2}))$$
$$t \in [0, 2\pi], \;\; s \in [-a, a]$$

כאשר $0 < a$ קבוע. אז S הוא משטח דו־צדדי.

נכון / לא נכון

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x,y,z) = z^3 + y^3(2x^2 - 4x)$. המשוואה $f(x,y,z) = 8$ מגדירה את y כפונקציה של x, z בסביבת $(1,0,2)$.

נכון / לא נכון

שאלה 7

תחום ההגדרה הטבעי (המקסימלי) עבור הפונקציה $f(x,y,z) = \frac{ln(x^2+y^2+z^2-1)}{x+y+z}$ הוא פשוט קשר וקשיר.

נכון / לא נכון

שאלה 8

הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב$-(0,0)$.

נכון / לא נכון

חלק ג'

ענו על שתי השאלות הבאות (כל שאלה שווה 30 נקודות).

שאלה 9

נתון השדה $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$.

א. הראו שהשדה משמר ב$-\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ומצאו את פונקציית הפוטנציאל שלו.

ב. חשבו את $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$, $\overrightarrow{n}$ נורמל חיצוני של S כאשר S הוא משטח חלק למקוטעין, חסום, סגור ובעל שטח החוסם תחום V אשר אינו מכיל את $(0,0,0)$.

ג. חשבו את $\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$, $\overrightarrow{n}$ נורמל חיצוני של S כאשר S הוא משטח חלק למקוטעין, חסום, סגור ובעל שטח החוסם תחום V אשר מכיל את $(0,0,0)$.

ד. חשבו את עבודת השדה $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r}$ כאשר c מסלול כלשהו מ$-(1,0,0)$ ל$-(1,1,1)$ שאינו עובר ב$-(0,0,0)$.

שאלה 10

מקור קרינה רדיואקטיבי מצוי בנקודה $A=(1,1,3)$. הקרינה בכל נקודה נתונה ע"י: $R(x,y,z)=\frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2+1}$

א. באיזה כיוון תעוף הציפור הנמצאת בנקודה A אם היא רוצה להקטין את הקרינה במהירות המקסימלית?

ב. באיזה כיוון ילך אדם הנמצא בנקודה A על המשטח $x^2+y+z=5$, אם הוא רוצה להקטין את הקרינה בקצב המקסימלי?

מטפס הרים מצוי על קרקע המתוארת ע"י $x+y^2+z^2=3$ בנקודה $B=(1,1,1)$.

ג. באיזה כיוון במרחב הוא יטפס אם ברצונו לטפס את הטיפוס הקשה ביותר?

ד. תחת אותם התנאים, לאיזה כיוון יטפס אם כח המשיכה היה פועל בכיוון החיובי של ציר y?